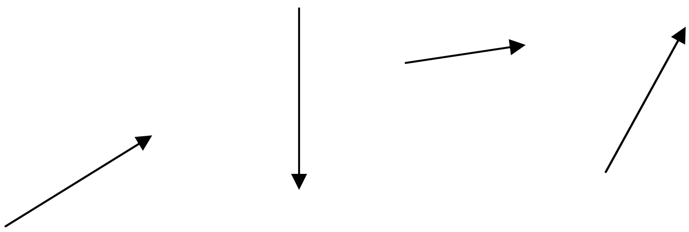
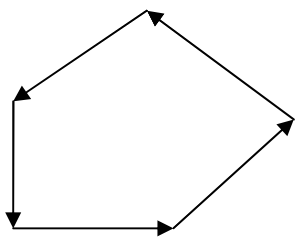
VEKTORI - Zadaci

1. a) Zbrojite sve zadane vektore na slici:



b) Koliko iznosi zbroj svih vektora na slici:



c) Zadan je paralelogram ABCD, pri čemu je točka O sjecište dijagonala (O ih raspolavlja!) i neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Izrazite vektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OD}$ preko vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

d) Zadan je pravilni šesterokut OABCDE sa stranicom OA=3cm. Ako je $\overrightarrow{OA} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{p}$, tada:

- nađite vezu $\vec{m}$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$
- izrazite $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EB}$ i $\overrightarrow{OC}$ preko $\vec{m}$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$.

e) Odredite zbroj i razliku vektora: $\vec{a} = \{2,-1,3\}$, $\vec{b} = \{0,2,-4\}$.

2. a) Zadane su točke $T_1(2,4,0)$ i $T_2(-1,1,2)$. Nađite vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$, njegov modul, te kuteve α, β, γ koje vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ zatvara s koordinatnim osima.

b) U točki $A(2,1,-1)$ djeluje sila $\vec{R}$ iznosa $|\vec{R}| = 7$. Ako imamo dvije komponente sile $R_x = 2$, $R_y = -3$, $R_z > 0$, odredite krajnju točku B vektora $\vec{R}$, te kuteve koje vektor $\vec{R}$ zatvara s koordinatnim osima.

3. a) Točke A,B,C,D su određene svojim radijvektorima $\overrightarrow{r_A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{r_B} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{r_C} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{r_D} = -\vec{j} + \vec{k}$. Pokažite da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kolinearni i odredite omjer njihovih duljina.

   b) Odredite x i y tako da vektori $\vec{a} = x\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - y\vec{k}$ budu kolinearni.

   c) Dokažite da su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ linearno nezavisni, a zatim prikažite vektor $\vec{x} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

4. a) Nađite skalarni produkt vektora $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

   b) Odredite kut između vektora $\vec{a} = \{-1,1,0\}$, $\vec{b} = \{1,-2,2\}$.

   c) Zadani su vrhovi četverokuta A(1,-2,2), B(1,4,0), C(-4,1,1), D(-5,-5,3). Izračunajte kut između dijagonala $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

   d) Zadani su vrhovi paralelograma A(-3,2,0), B(-1,4,1), C(-2,4,2). Odredite četvrti vrh D, duljine dijagonala te kut između dijagonala.

   e) Nađite skalarnu projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$, ako je vektor $\vec{a} = \{2,-2,1\}$, $\vec{b} = \{1,3,-2\}$.

   f) Odredite vektorsku projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, ako je vektor $\vec{a} = \{6,-10,-8\}$, $\vec{b} = \{2,1,-2\}$.

5. a) Zadani su moduli vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ te kut φ između njih: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 30°$. Odredite $|\vec{a} \times \vec{b}|$!

   b) Zadani su vektori: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$. Odredite $\vec{a} \times \vec{b}$!

   c) Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{k}$.
      1) Odredite površinu paralelograma zadanog s ovim vektorima.
      2) Odredite duljine dijagonala.
      3) Odredite kut između dijagonala.

   d) Izračunajte površinu trokuta kojemu su vrhovi: A(7,3,4), B(1,0,6), C(4,5,-2).

6. a) Izračunajte $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, ako je: $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}$.

b) Zadani su vektori $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\alpha\vec{j}$, $\vec{c}=3\alpha\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, gdje su $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ne komplanarni jedinični vektori. Odredite skalar α tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ budu komplanarni.

c) Odredite volumen tetraedra čiji su vrhovi: A(2,2,2), B(4,3,3), C(4,5,4), D(5,5,6).

d) Odredite visinu paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

e) Zadani su vrhovi trostrane piramide ABCD: A(6,1,4),B(2,-2,-5),C(7,1,3),D(1,-3,7).
Nađite:
1) površinu baze ΔABC.
2) volumen piramide V_{ABCD}.
3) visinu v piramide spuštenu iz vrha D na bazu ΔABC.

7. a) U trokutu ΔABC je: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=5$, $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$.
Izračunajte površinu trokuta ΔABC.

b) Ako je $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$, odredite $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

c) Ako je $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$, odredite površinu paralelograma razapetog vektorima $2\vec{b}-\vec{a}$ i $3\vec{a}+2\vec{b}$.